OLASILIK

Olasılık, bir olaya hangi sıklıkla rastlanabileceğinin ya da bir olayın olabilirlik derecesinin ölçüsüdür. Örneğin, madeni bir para havaya atıldığında yazı ya da tura gelebilir. Burada her ikisinin gelme olasılığı eşit ve bu olasılık ½ dir.

Temel Kavramlar:

Olay: Olasılık teorisinin temel kavramlarından birisi olay kavramıdır. Olay bir deneyin sonucu anlamındadır. Kesin olay ve rastgele olay olmak üzere iki çeşit olaydan söz edilebilir.

Kesin Olay: Deney tekrarlandığında sonucu kesin olan olaydır.

Rastgele Olay: Deney tekrarlandığında sonucun her seferinde değişebildiği olaylara denir. Olasılık teorisi rastgele olaylarla ilgilenir.

Örnek Uzay: Bir deneyin tüm mümkün sonuçlarının oluşturduğu kümeye örnek uzay denir ve Ω ile gösterilir. Denemeler sonucunda tanımlanan her bir olay örnek uzayın bir alt kümesidir. Bu sebeple Ω nın kendisi ve boş küme de birer olaydır. Ω ya kesin olay, boş kümeye (∅) ise imkansız olay denir.

Örneğin, bir zar atma deneyi için örnek uzay

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

şeklindedir. Zarın çift sayı gelmesi olayı $A=\{2,4,6\}$; zarın 7 gelmesi olayı $B=\emptyset$ dir.

Sınıf: Örnek uzayın alt kümelerinden oluşan kümeye sınıf denir. Elemanları küme olan küme olarak da tanımlanabilir. Örneğin, $\Omega=\{1,2,3,4\}$ olarak verilsin. Buna göre;

$U_1=\{\{1\},\{3\}\}$ U_1 sınıfı Ω üzerinde bir sınıftır.

$U_2=\{\Omega,\emptyset\}$ U_2 sınıfı Ω üzerinde bir sınıftır.

$U_3=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ U_3 sınıfı Ω üzerinde bir sınıftır.

$U_4=\{1,3\}$ U_4 sınıfı Ω üzerinde bir sınıf değildir.

- Bir olayın kendisinin, tümleyeninin, başka olaylarla birleşiminin, kesişiminin olasılığını bulabilmek için bu olayların bir seti gerekir. Bu set σ-cebir ile tanımlanır.

TANIM: Ω boş olmayan bir küme U da Ω üzerinde tanımlı bir sınıf olsun.

i. $\Omega \in U$ olmalı

ii. $\forall A \in U$ iken $A^c \in U$ (A^c : A kümesinin tümleyeni anlamına gelir)

iii. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in U$ iken $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

özelliklerini sağlayan U sınıfına σ-cebir denir. (Ω,U) ikilisine ise ölçülebilir uzay denir.

Örnek: $\Omega=\{1,2,3,4\}$ olsun.

a) $U_1=\{\emptyset, \{1\}\}$ sınıfı σ-cebir midir?

Çözüm a: $\Omega \notin U_1$ olduğundan U_1 sınıfı Ω üzerinde σ-cebir değildir.

b) $U_2=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \Omega\}$ sınıfı σ-cebir midir?

Çözüm b:

i. $\Omega \in U_2$ koşulu sağlandı

ii. $\emptyset \in U_2 \rightarrow \emptyset^c=\Omega \in U_2$ koşulu sağlandı

$\{1\} \in U_2 \rightarrow \{1\}^c=\{2,3,4\} \in U_2$ koşulu sağlandı

$\{2\} \in U_2 \rightarrow \{2\}^c=\{1,3,4\} \in U_2$ koşulu sağlandı

iii. $A_1=\{1\}$

$A_2=\{2\}$

$A_3=\emptyset$

$A_4=\emptyset$

$\vdots$

$A_n=\emptyset$

ise

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{1\} \cup \{2\}=\{1,2\} \notin U_2$ olduğundan U_2 sınıfı Ω üzerinde σ-cebir değildir.

Örnek: $\Omega=\{1,2,3\}$ olsun.

$U_1=\{\{1\}, \{2,3\}, \emptyset, \{1,2,3\}\}$ sınıfı σ-cebir midir?

Çözüm:

i. $\Omega \in U_1$ koşulu sağlandı

ii. $\{1\} \in U_1 \rightarrow \{1\}^c=\{2,3\} \in U_1$ koşulu sağlandı

$\emptyset \in U_1 \rightarrow \emptyset^c=\{1,2,3\} \in U_1$ koşulu sağlandı

iii. $A_1=\{1\}$

$A_2=\{2,3\}$

$A_3=\emptyset$

$A_4=\emptyset$

$\vdots$

$A_n=\emptyset$

ise

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{1\} \cup \{2,3\}=\{1,2,3\} \in U_1$ olduğundan U_1 sınıfı Ω üzerinde bir σ-cebirdir.

OLASILIK ÖLÇÜSÜ (Olasılık Aksiyomları)

TANIM: Ω boş olmayan bir küme U da Ω üzerinde tanımlı σ-cebir olsun.

P: U→ [0,1]

A→P(A)

P küme fonksiyonu

i. ∀A∈U için $0 \leq P(A) \leq 1$

ii. P(Ω)=1

iii. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ U'daki *ayrık* olayların bir dizisi olmak üzere

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa P küme fonksiyonuna *olasılık ölçüsü* denir. P(A) sayısına ise *A olayının olasılığı* denir.

TANIM: Ω boş olmayan bir küme U da Ω üzerinde σ-cebir ve P, U üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsü ise (Ω,U,P) üçlüsüne bir *olasılık uzayı* denir.

Örnek: Örnek uzay $\Omega=\{a,b,c,d\}$ ve $U=\{A: A \subset \Omega\}$ olsun.

P: U→ [0,1]

$A \to P(A)=\frac{s(A)}{s(\Omega)}$

ile verilen P küme fonksiyonu bir olasılık ölçüsü müdür?

Çözüm:

i. ∀A∈U için P(A)≥0 dır. Çünkü s(Ω)=4 ve s(A)=1,2,3 veya 4 olabilir. Dolayısıyla $P(A)=\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}$ veya $\frac{4}{4}$ olabilir. Yani $0 \leq P(A) \leq 1$ koşulu sağlanır.

ii. $P(\Omega) = \frac{s(\Omega)}{s(\Omega)}=1$

iii. $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)=\frac{(\cup_{n=1}^{\infty} An)\ nin\ eleman\ sayısı}{s(\Omega)} = \frac{s(A_1)\cup s(A_2)\cup \ldots s(A_n)}{s(\Omega)}$

$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)= \frac{s(A_1)}{s(\Omega)} + \frac{s(A_2)}{s(\Omega)} + \ldots$

$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)=P(A_1)+P(A_2)+ \ldots$

$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

olduğundan P küme fonksiyonu olasılık ölçüsüdür

RASTGELE DEĞİŞKEN

Bütün bilimlerin ortak amaçlarından biri gerçek dünya hakkında bilgi sahibi olmaktır. Bir zar atıldığında 1,2,3,4,5 ya da 6 gelecektir. Fakat hangisinin geleceği kesin olarak söylenemez. Bir zarın atılması deneyinde örnek uzay

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

şeklindedir. Bu gözlemlerle herhangi bir matematiksel işlem yapılamaz. Bu deney belli sayıda tekrar edildiğinde sadece istenen gözlemin kaç kez geleceğinin beklenen değeri verilebilir.

Bir X fonksiyonu örnek uzaydaki olayları reel sayılar uzayına aktarabilirse, bu fonksiyon sayesinde reel sayılar uzayında işlemler yapılabilir (Akdi, 2010).

Tanım: *(Ω,U,P)* bir olasılık uzayı olmak üzere,

$$X: \Omega \rightarrow \Re$$

$$w \rightarrow X(w)$$

fonksiyonu $\forall a \in \Re$ için $\{w : X(w) \leq a\} \in U$ özelliğini sağlıyorsa, X fonksiyonuna bir rastgele değişken denir. Buradaki $\{w : X(w) \leq a\} \in U$ kümesi $X^{-1}(-\infty, a]$ şeklinde de ifade edilebilir. Bir rastgele değişkenin değer kümesi reel sayıların bir alt kümesidir (Akdi, 2010).

Örnek: Bir deney için Ω örnek uzayı ve U sınıfı aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

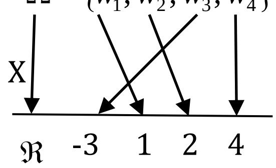
$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \quad , \quad U = \{\{w_1, w_3\}, \{w_2, w_4\}, \Omega, \Phi\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \Re$$

$$w_i \rightarrow X(w_i) = \begin{cases} 1, & w_1 \\ 2, & w_2 \\ -3, & w_3 \\ 4, & w_4 \end{cases}$$

ile verilen X fonksiyonu bir rastgele değişken midir?

Çözüm: $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$



$\forall a \in \Re$ için;

a<-3 ise $\{w: X(w) \le a\} = X^{-1}(\Phi) = \Phi \in U$

-3≤a<1 ise $\{w: X(w) \le a\} = X^{-1}(\{-3\}) = w_3 \notin U$

1≤a<2 ise $\{w: X(w) \le a\} = X^{-1}(\{-3,1\}) = \{w_1, w_3\} \in U$

2≤a<4 ise $\{w: X(w) \le a\} = X^{-1}(\{-3,1,2\}) = \{w_1, w_2, w_3\} \notin U$

a≥ 4 ise $\{w: X(w) \le a\} = X^{-1}(\{-3,1,2,4\}) = \Omega \in U$

olduğundan X fonksiyonu bir rastgele değişken değildir.

Örnek: Bir deney için Ω örnek uzayı ve U sınıfı aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

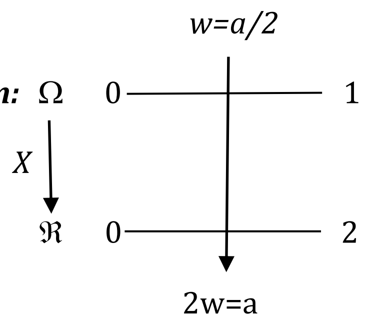
$$\Omega = [0,1] \quad , \quad U = \text{Borel Cebir}$$

$X: \Omega \to \Re$

$w \to X(w) = 2w$

ile verilen X fonksiyonu bir rastgele değişken midir?

Çözüm:



$\forall a \in \Re$ için;

a<0 için $\{w: X(w) \le a\} = X^{-1}(\Phi) = \Phi \in U$

0≤a<2 ise $\{w: X(w) \le a\} = X^{-1}([0,a]) = \left[0, \frac{a}{2}\right] \in U$

a≥ 2 ise $\{w: X(w) \le a\} = X^{-1}([0,2]) = [0,1] = \Omega \in U$

olduğundan X fonksiyonu bir rastgele değişkendir.

DAĞILIM FONKSİYONU

X, Ω üzerinde tanımlı bir rastgele değişken olmak üzere herhangi bir gerçek x değeri için X rastgele değişkeninin x'e eşit ya da ondan daha küçük değer alma olasılığı birikimli dağılım fonksiyonu ya da kısaca dağılım fonksiyonu olarak tanımlanır. $F(x)$ ya da $F_X(x)$ ile gösterilir. Yani,

$$F_X(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x})$$

biçiminde tanımlanır.

TANIM: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere,

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$
$$\mathrm{X} \rightarrow F(x) = \mathrm{P}(\{w: X(w) \leq x\})$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

$f(t)$, X rastgele değişkeninin olasılık dağılımının "t" deki değeri olmak üzere $f(t)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonu bilinen bir rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

- Kesikli rastgele değişken için dağılım fonksiyonu,

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{-\infty}^{x} f(t)\,, \qquad -\infty < \mathrm{x} < \infty \text{ için}$$

- Sürekli rastgele değişken için dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,, \qquad -\infty < \mathrm{x} < \infty \text{ için}$$

şeklinde elde edilir (Burada X in tanım aralığı genel olarak verilmiştir. Hangi dağılımla ilgileniliyorsa o dağılımın tanım aralığı olmalıdır).

DAĞILIM FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ

Teorem: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, X bir rastgele değişken ve F de X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu olsun. Buna göre;

a) F azalmayan bir fonksiyondur.
$x_1 \leq x_2$ ise $F(x_1) \leq F(x_2)$ dir.

b) F sağdan süreklidir.
$\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ dir.

Teorem: X bir rastgele değişken, F de X'in dağılım fonksiyonu olsun. Buna göre;

a) a,b ∈ ℝ ve a<b olmak üzere $P(a<X \leq b) = F(b) - F(a)$

b) a ∈ ℝ olmak üzere $P(X=a) = F(a^+) - F(a^-)$

dir. X rastgele değişkeni (sürekli veya kesikli) ve F(x) dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} P(X>x) &= 1 - P(X \leq x) \\ &= 1 - F(x) \end{aligned}$$

dir.

- Kesikli bir X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F olsun. X rastgele değişkeninin değer kümesi D_x olmak üzere x∈ ℝ için X'in olasılık fonksiyonu dağılım fonksiyonu yardımıyla

$$P(X=x) = F(x^+) - F(x^-)$$

  ile elde edilir.

- Sürekli bir X rastgele değişkeninin değer kümesi D_x ve dağılım fonksiyonu F(x) olmak üzere X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{dF(x)}{dx}, & F'nin\ t\ddot{u}revlenebildi\breve{g}i\ yerlerde \\ 0, & dd \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

- X rastgele değişkeni sürekli ise her x$\in \mathbb{R}$ için P(X=x)=F(x^+) −F(x^-)=0 dır.

- Bir rastgele değişkeni en iyi karakterize eden o rastgele değişkenin dağılım fonksiyonudur.

Kaynaklar

1. Akdi, Y. (2010). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.
2. Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 3. Baskı, Seçkin Yayınevi.
3. Akdeniz, F. (2007). Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi.
4. Hogg, R. V. and Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.
5. Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.
6. Ross, M,R. (2012) Olasılık ve İstatistiğe Giriş-Mühendisler ve Fenciler için, 4. Basımdan Çeviri, Nobel Kitabevi.
7. Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.
8. Erbaş, S.O. (2007). Olasılık ve İstatistik, İkinci Baskı, Gazi Kitabevi.